

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

7. FLUIDI VISCOSI: MOTO IN CONDOTTE

A cura di: DIEGO BERZI

v1.5

Indice

1	Cadente energetica media	3
1.1	Moto laminare	6
1.2	Moto turbolento	8
1.2.1	Legge dei tubi lisci	8
1.2.2	Legge dei tubi scabri	9
1.2.3	Transizione	9
1.3	Fluidi comprimibili	12
2	Perdite localizzate	15

1 Cadente energetica media

Abbiamo visto (Cap. 5, Par. 2) che, nel caso di una corrente di fluidi reali, l'energia meccanica non si conserva, ma diminuisce nel senso del moto trasformandosi in calore. Abbiamo chiamato cadente energetica media J il modulo della derivata del carico totale medio lungo la coordinata curvilinea s . Per definizione, essa rappresenta la pendenza locale della Linea dei Carichi Totali (LCT) medi rispetto all'orizzontale. Vediamo ora come sia possibile determinare la cadente per via sperimentale, ricorrendo ai concetti illustrati nel Cap. 6.

Per semplicità, consideriamo di fare esperimenti su di un fluido viscoso e incomprimibile in moto stazionario all'interno di una condotta cilindrica ad asse orizzontale e a sezione circolare costante (Fig. 1). In queste condizioni, l'equazione di continuità (Cap. 4, Par. 1.3) afferma che la portata Q si mantiene costante su ogni sezione trasversale al flusso. Se la geometria della condotta, di diametro D , è costante, non vi sono ragioni per cui la cadente J vari lungo s . La LCT è, dunque, una retta inclinata rispetto all'orizzontale; dal momento che la portata e la sezione A della condotta non variano lungo s , anche la velocità media trasversale della corrente $V = Q/A$ non varia lungo s . La linea piezometrica, distante dalla LCT una quantità pari all'altezza cinetica media, risulta, dunque, parallela alla LCT (Fig. 1). La pendenza della LCT si può, perciò, determinare dalla diminuzione di quota piezometrica per unità di lunghezza L della condotta, facilmente misurabile tramite, ad esempio, un manometro differenziale. In una condotta ad asse orizzontale (\tilde{z} costante), la variazione di quota piezometrica equivale alla variazione di altezza piezometrica p/γ . Essendo il fluido incomprimibile, quest'ultima si determina dalla diminuzione di pressione Δp . Nel sistema appena descritto, dunque, la caduta di pressione per unità di lunghezza $\Delta p/L$ rappresenta la variabile di stato. Le variabili di controllo nei nostri esperimenti sono costituite: dalle proprietà fisiche del fluido circolante, cioè dalla densità ρ e dalla viscosità μ (la tensione superficiale non conta, non essendo presenti interfacce tra fluidi non miscibili); dalla geometria della condotta, cioè dal diametro D e da una misura delle asperità superficiali della condotta stessa, la **scabrezza** \mathcal{R} , avente le dimensioni di una lunghezza; dalla velocità media V (in alternativa potrebbe essere utilizzata la portata Q). La relazione funzionale tra la variabile di stato e le variabili di controllo è, dunque, del tipo

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, D, \mathcal{R}, V). \quad (1)$$

Per determinare la funzione f nell'Eq.(1) dovremmo effettuare almeno 10^5 esperimenti. Per ridurre il numero di esperimenti, passiamo a un sistema di unità di misura intrinseco al problema. Dobbiamo scegliere 3 variabili di controllo tra di loro dimensionalmente indipendenti che costituiscano la base del nuovo sistema di misura. Scegliamo come grandezza geometrica

il diametro D e come grandezza cinematica la velocità media V . Come grandezza dinamica, possiamo scegliere la densità ρ (e, in tal caso, si parla di **terna inerziale**, visto che i termini inerziali nell'equazione di bilancio della quantità di moto sono proporzionali alla densità) o la viscosità μ (**terna viscosa**). Come detto, entrambe le scelte sono perfettamente lecite (ma vedremo in seguito che una può risultare più conveniente dell'altra in certe situazioni). Dal momento che, nella maggior parte dei problemi pratici, l'inerzia conta, scegliamo la terna inerziale. Nel nuovo sistema di unità di misura, l'Eq.(1) diventa

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = f'(\Pi_\mu, \Pi_{\mathcal{R}}). \quad (2)$$

dove $\Pi_\mu = \mu/(\rho V D)$ e $\Pi_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/D$. L'inverso del gruppo Π_μ associato con la viscosità quando si usa una terna inerziale (ma si dimostra facilmente che è anche il gruppo Π associato con la densità quando si usa una terna viscosa) prende il nome di **numero di Reynolds** [1, 2], $Re = \rho V D/\mu$, ed è una misura del rapporto tra le inerzie e le forze viscosi. Il gruppo $\Pi_{\mathcal{R}}$ associato con la scabrezza viene chiamato **scabrezza relativa**. L'Eq.(2) si può anche scrivere come

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right). \quad (3)$$

Per le considerazioni fatte in precedenza, la caduta di pressione per unità di lunghezza è pari al prodotto della cadente per il peso specifico del fluido, $\Delta p/L = \gamma J$, per cui

$$\frac{\gamma J}{\frac{\rho V^2}{D}} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right). \quad (4)$$

Esplicitando la cadente, con $\gamma = \rho g$, e moltiplicando e dividendo per 2, si ottiene

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD}. \quad (5)$$

dove $\lambda = 2f''(Re, \mathcal{R}/D)$ prende il nome di **indice di resistenza**. L'Eq.(5) rappresenta la **formula di Darcy-Weisbach** [3, 4] per la determinazione della cadente, che ha un'origine sperimentale, e che qui è stata ricavata ricorrendo alla sola analisi dimensionale. Ovviamente, il problema rimane quello di determinare la dipendenza dell'indice di resistenza dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa. A tale scopo, sarà sufficiente effettuare infinito alla seconda esperimenti (diciamo almeno 10^2). Prima di esporre quale è stato il risultato di tali esperimenti, descriviamo brevemente una famosa esperienza condotta da Osborne Reynolds [2] alla fine dell'Ottocento.

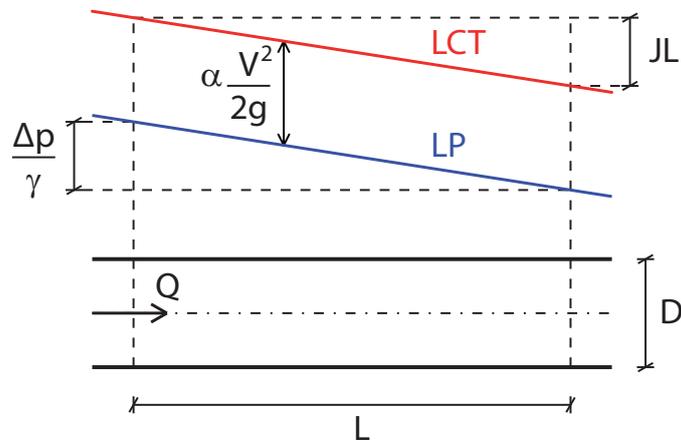


Figura 1: moto stazionario in una condotta cilindrica a sezione circolare.

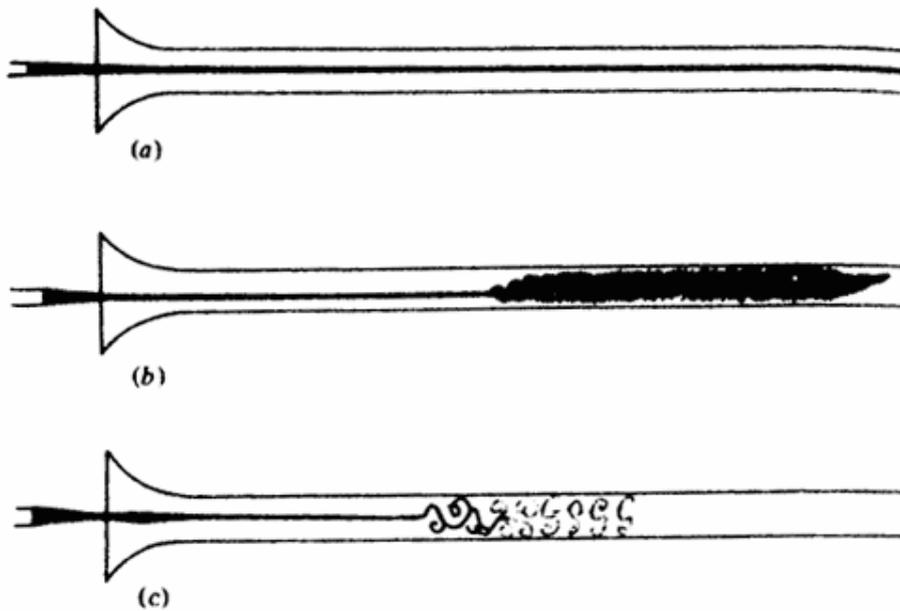


Figura 2: flusso di tracciante nell'esperienza di Reynolds (disegni originali dello stesso autore [2]) per (a) moto laminare; (b) moto turbolento; (c) zona di instabilità.

Reynolds introdusse una piccola quantità di **tracciante** (sostanza caratterizzata dal fatto di assumere la stessa velocità del fluido all'interno del quale viene rilasciata) all'interno di una condotta cilindrica ad asse orizzontale e a sezione circolare nella quale un fluido era fatto circolare in condizioni di moto stazionario. Per numeri di Reynolds minori di un certo valore criti-

co, $Re_c \approx 2100$, il flusso di tracciante si manteneva ben confinato e parallelo all'asse della condotta (Fig. 2a), indipendentemente dalla posizione di rilascio. Da quest'osservazione, Reynolds trasse correttamente la conclusione che le traiettorie delle particelle di fluido fossero tra di loro parallele: “the elements of the fluid follow one another along lines of motion which lead in the most direct manner to their destination” [2]. A questo regime di moto venne dato il nome di **moto laminare**. Per numeri di Reynolds abbastanza elevati, il tracciante si disperdeva uniformemente all'interno della condotta (Fig. 2b), indice di irregolarità e disordine nelle traiettorie delle particelle di fluido: (the elements of fluid) “eddy about in sinuous paths the most indirect possible” [2]. A questo regime di moto venne dato il nome di **moto turbolento**. Per numeri di Reynolds intermedi, Reynolds descrisse un regime di transizione in cui il flusso era spazialmente eterogeneo, con blocchi di flusso laminare alternati a “flashes” [2] di moto fluttuante turbolento (**zona di instabilità**).

1.1 Moto laminare

Per ragioni che verranno chiarite in seguito, in condizioni di moto laminare λ non dipende dalla scabrezza relativa, per cui $\lambda = \lambda(Re)$ e sono sufficienti un'infinità (diciamo 10) di esperimenti per determinare tale dipendenza. In realtà, un uso più accorto del teorema II ci consente addirittura di determinare la forma della dipendenza dell'indice di resistenza dal numero di Reynolds senza dover ricorrere alla sperimentazione (e, conseguentemente, di ridurre ulteriormente il numero di esperimenti da effettuare). Se il moto è stazionario e le traiettorie sono rettilinee e parallele, infatti, i termini inerziali nell'equazione di bilancio della quantità di moto si annullano (una dimostrazione rigorosa di questo verrà fornita in seguito). Questo significa che la densità non ha influenza sul moto laminare e non deve comparire tra le variabili di controllo della caduta di pressione per unità di lunghezza. L'Eq.(1) diventa, allora,

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\mu, D, V). \quad (6)$$

L'unica scelta possibile per adimensionalizzare il problema è, dunque, quella di utilizzare la terna viscosa μ , D e V . Passando alla formulazione in termini di gruppi Π , l'Eq.(6) si trasforma nella

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\mu \frac{V}{D^2}} = f'(1, 1, 1) = C, \quad (7)$$

dove C è una costante. Per la determinazione del valore di C è sufficiente, in linea di principio, effettuare un solo esperimento (meglio comunque farne diversi e poi mediare per via delle incertezze sperimentali). Il risultato di

questo ipotetico esperimento sarebbe $C = 32$. Vedremo più avanti come questo risultato possa essere ottenuto per via puramente teorica. L'Eq.(3) ci dice che

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = \frac{\lambda}{2}, \quad (8)$$

cioè che, a meno di una costante, l'indice di resistenza rappresenta il gruppo Π associato con $\Delta p/L$ usando una terna inerziale. Combinando l'Eq.(7) e Eq.(8) otteniamo

$$\lambda = \frac{2C\mu}{\rho V D} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (9)$$

che è l'espressione dell'indice di resistenza in condizioni di moto laminare (e rappresenta un ramo di iperbole equilatera nel piano $\text{Re} - \lambda$). Vale la pena ribadire che, se non ci fossimo accorti della non dipendenza di λ da ρ , il fatto di scegliere una terna inerziale invece che una viscosa avrebbe comportato l'onere di effettuare un numero di esperimenti molto maggiore rispetto a quanto strettamente necessario. È, dunque, importante scegliere come grandezze costituenti la terna base quelle che sicuramente hanno influenza sul problema. Notiamo anche che, mentre l'Eq.(8) suggerisce che la caduta di pressione per unità di lunghezza dipende dal numero di Reynolds, l'Eq.(7) rivela che questa dipendenza è solo apparente. È questo un tipico esempio di **correlazione spuria**. Sembra che λ dipenda dal numero di Reynolds, e, quindi, dalla densità, solo perché nella definizione di λ stesso compare la densità: esiste cioè una variabile (in questo caso la densità) che influenza sia la variabile di stato che quella di controllo. La correlazione dell'Eq.(7) indica solo la presenza di una variabile comune, non la presenza di un rapporto di causa-effetto. Bisogna prestare attenzione a non interpretare sempre una correlazione come un rapporto causa-effetto, ignorando la possibilità di correlazioni spurie; il rischio di tali interpretazioni errate aumenta in quegli ambiti in cui i fenomeni non sono influenzati da un numero limitato di variabili di controllo (si pensi alla medicina, alla biologia o all'economia), e/o dove il metodo scientifico non è applicato o è applicato in maniera approssimativa.

Come già detto, superato il numero di Reynolds critico, il flusso di trascinante nell'esperienza di Reynolds diventa irregolare. In realtà, per numeri di Reynolds fino a 10000, il moto laminare è ancora possibile: esso è, però, instabile ed è sufficiente una piccola perturbazione (per esempio un impulso trasmesso attraverso il contorno della condotta) perché zone di moto turbolento si alternino a blocchi di moto laminare. Per Re compresi tra 2100 e 10000 il valore di λ dipende fortemente dalle condizioni della sperimentazione (dispersione dei dati sperimentali), sebbene la tendenza di λ è di aumentare col numero di Reynolds: si parla di **zona critica**. Recentemente [7], è stato dimostrato come questa dispersione dei dati sperimentali sia

solo apparente. Si può infatti esprimere il λ complessivo nella zona critica come somma pesata (Fig. 3) del λ associato con i blocchi di moto laminare (espresso dall'Eq.(9)) e di quello associato con le zone di moto turbolento (espresso dalla successiva Eq.(11)). Superato il valore di 10000, il moto è, nella pratica, sempre turbolento.

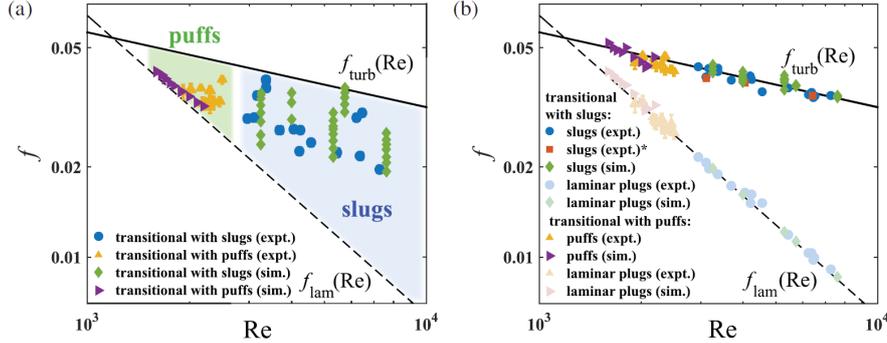


Figura 3: indice di resistenza (qui indicato con f) in funzione del numero di Reynolds nella zona critica (da Cerbus *et al.* [7]). In (a) si nota che l'indice di resistenza complessivo non segue nessun andamento particolare, mentre in (b) si vede che i contributi separati dei blocchi laminari e della zone turbolente seguono l'Eq.(9) (f_{lam}) e l'Eq.(11) (f_{turb}), rispettivamente.

1.2 Moto turbolento

In condizioni di moto turbolento, l'indice di resistenza dipende, in generale, sia dal numero di Reynolds che dalla scabrezza relativa.

1.2.1 Legge dei tubi lisci

Cominciamo a considerare il caso di tubi lisci, per i quali la scabrezza (e, quindi, anche la scabrezza relativa) è nulla. Vedremo in seguito che in realtà nessun tubo reale è effettivamente liscio. Si deve intendere questa condizione come una condizione di autosimilarità rispetto alla scabrezza relativa: per valori sufficientemente bassi di \mathcal{R}/D (il limite dipende dal numero di Reynolds), la scabrezza relativa smette di influenzare il valore di λ . In questo caso, i risultati sperimentali sono ben interpolati dalla seguente formula di derivazione semi-analitica (ne ripercorreremo la derivazione in uno dei prossimi Capitoli)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right), \quad (10)$$

che prende il nome di **formula di Prandtl-von Kármán per tubi lisci** [5, 6]. L'Eq.(10) è trascendente e non consente il calcolo esplicito di λ a

partire dal numero di Reynolds: bisogna ricorrere a metodi iterativi. Una formula esplicita, valida però solo per numeri di Reynolds compresi tra circa 4000 e 100000 è stata suggerita da Blasius [8]

$$\lambda = 0.316\text{Re}^{-0.25}. \quad (11)$$

Sperimentalmente [9] si è visto che una condotta può essere considerata liscia se

$$\text{Re}\sqrt{\lambda}\frac{\mathcal{R}}{D} \leq 10\sqrt{2}. \quad (12)$$

1.2.2 Legge dei tubi scabri

Analogamente all'autosimilarità rispetto alla scabrezza relativa, l'indice di resistenza presenta anche un'autosimilarità rispetto al numero di Reynolds: per valori sufficientemente elevati di Re (il limite dipende dalla scabrezza relativa), il numero di Reynolds smette di influenzare il valore di λ . In questo caso, i risultati sperimentali sono ben interpolati dalla seguente formula di derivazione semi-analitica (anche in questo caso, ne ripercorreremo la derivazione in uno dei prossimi Capitoli)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{1}{3.71}\frac{\mathcal{R}}{D}\right), \quad (13)$$

che prende il nome di **formula di Prandtl-von Kármán per tubi scabri** [5, 6]. La condizione di autosimilarità rispetto a Re prende il nome di **moto assolutamente (o puramente) turbolento**. Sperimentalmente [9] si è visto che il moto è assolutamente turbolento se

$$\text{Re}\sqrt{\lambda}\frac{\mathcal{R}}{D} \geq 140\sqrt{2}. \quad (14)$$

Spesso si indica l'indice di resistenza in moto assolutamente turbolento come λ_∞ .

1.2.3 Transizione

La condizione per cui $10\sqrt{2} \leq \text{Re}\sqrt{\lambda}\mathcal{R}/D \leq 140\sqrt{2}$, e λ dipende sia dal numero di Reynolds che dalla scabrezza relativa, si chiama **moto turbolento di transizione**. Prima di presentare i risultati sperimentali relativi a tale regime di moto, occorre definire in maniera un po' più rigorosa la scabrezza.

Un'osservazione al microscopio delle asperità che caratterizzano la superficie interna di una condotta reale mostra come siano presenti picchi e valli distribuiti in maniera casuale; i moderni paesaggi urbani consentono di farsi un'idea della scabrezza superficiale senza ricorrere al microscopio (Fig. 4). Come è ovvio, è impossibile caratterizzare la distribuzione di una variabile aleatoria con un solo parametro. Per ovviare a questo problema,



Figura 4: Midtown Manhattan (New York, USA).

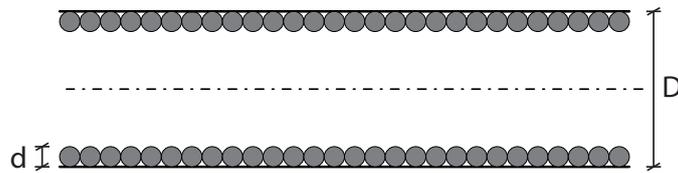


Figura 5: rappresentazione della scabrezza artificiale utilizzata negli esperimenti di Nikuradse [9].

i primi esperimenti [9] riguardanti il moto turbolento in tubi scabri sono stati effettuati utilizzando una scabrezza artificiale costituita da uno strato di granelli sferici di sabbia omogenea aventi diametro uniforme d (Fig. 5). In questo caso, la scabrezza \mathcal{R} coincide esattamente con il diametro d . La Fig. 6 mostra i risultati degli esperimenti condotti da Nikuradse [9], in termini di indice di resistenza λ in funzione del numero di Reynolds, per valori diversi della scabrezza relativa. Tale grafico viene chiamato **arpa di Nikuradse**, per via della somiglianza delle curve interpolanti con le corde dello strumento musicale. Come si nota, per Re minori di 2000, tutti i punti collassano sulla curva del moto laminare, Eq.(9), qui rappresentata come una retta perché il grafico è in scala bilogarithmica. Per Re maggiore di 2000 e minore di 4000, λ aumenta col numero di Reynolds. Se la scabrezza relativa è sufficientemente elevata, l'indice di resistenza continua ad aumentare con Re fino al raggiungimento della condizione di moto assolutamente turbo-

lento, dove i punti sperimentali si dispongono lungo una retta orizzontale. Per valori minori di scabrezza relativa, i punti sperimentali di λ seguono la curva dei tubi lisci, data dall'Eq.(10), all'aumentare di Re , fino a quando la condizione data dall'Eq.(12) è soddisfatta; ad un aumento ulteriore del numero di Reynolds corrisponde un distacco graduale dalla curva dei tubi lisci ed un successivo aumento di λ con Re fino a raggiungere la condizione di moto assolutamente turbolento. La spiegazione fisica di questa osservazione sperimentale verrà data in uno dei prossimi Capitoli.

Nel caso di tubi cosiddetti **commerciali**, cioè caratterizzati da scabrezza disomogenea, il primo problema è quello di definire la scabrezza. Per questo, si rinuncia ad un criterio puramente geometrico in favore di uno energetico. In condizioni di moto assolutamente turbolento, l'indice di resistenza si calcola dall'Eq.(13). Invertendo, si può, allora, usare la relazione

$$\frac{\mathcal{R}}{D} = \frac{3.71}{10^{0.5/\sqrt{\lambda_\infty}}}, \quad (15)$$

per determinare una scabrezza equivalente a partire dalla conoscenza del valore dell'indice di resistenza in moto assolutamente turbolento λ_∞ : in altre parole, due condotte aventi lo stesso diametro, una caratterizzata da scabrezza omogenea e una da scabrezza disomogenea, hanno la stessa scabrezza equivalente se l'indice di resistenza in moto assolutamente turbolento è lo stesso. A parte il problema riguardante la definizione della scabrezza, i tubi commerciali si differenziano da quelli a scabrezza omogenea per il comportamento nella regione di moto turbolento di transizione. Nel caso dei tubi commerciali, infatti, l'indice di resistenza è sempre una funzione decrescente del numero di Reynolds in tale zona. I dati sperimentali dell'andamento dell'indice di resistenza col numero di Reynolds nel caso di moto turbolento di transizione in tubi commerciali sono ben rappresentati dalla seguente legge

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\mathcal{R}}{D} \right), \quad (16)$$

che prende il nome di **formula di Colebrook-White** [10], ottenuta combinando gli argomenti dei logaritmi delle due formule di Prandtl-von Kármán. In realtà, la formula di Colebrook-White descrive correttamente l'andamento di λ per tutte le condizioni moto turbolento; comprende, infatti, come casi limite sia l'Eq.(10) che l'Eq.(13). Tale formula e quella del moto laminare, Eq.(9), consentono, allora, di calcolare l'indice di resistenza in ogni condizione di moto. Un'alternativa, largamente utilizzata prima della diffusione dei calcolatori, è costituita dall'uso di un famoso diagramma rappresentante le curve $\lambda - Re$ interpolanti i dati sperimentali relativi a tubi commerciali di diversa scabrezza relativa equivalente. Tale diagramma è noto come **abaco di Moody** [11] ed è riportato in Fig. 7. Il confronto tra Fig. 7 e Fig. 6 mette in evidenza la differenza di comportamento nel moto turbolento di transizione in tubi commerciali e tubi a scabrezza omogenea.

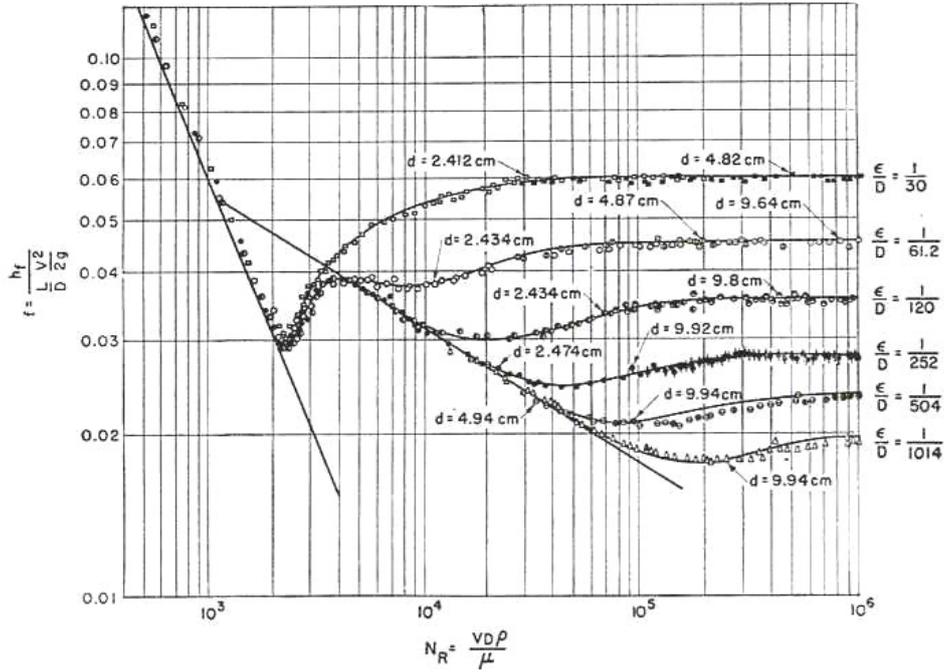


Figura 6: arpa di Nikuradse [9]. L'indice di resistenza, il numero di Reynolds e la scabrezza sono qui indicati come f , N_R e ϵ , rispettivamente.

1.3 Fluidi comprimibili

Una trattazione approfondita del moto in condotta di fluidi comprimibili è al di là dei nostri scopi. Ci limiteremo qui ad analizzare le conseguenze dell'inserimento della comprimibilità ϵ tra le variabili di controllo della caduta di pressione per unità di lunghezza. Nel caso di fluidi comprimibili, l'Eq.(1) diventa

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, D, \mathcal{R}, V, \epsilon). \quad (17)$$

Utilizzando la solita terna inerziale per l'adimensionalizzazione, determiniamo il gruppo Π associato con la comprimibilità:

$$\Pi_\epsilon = \frac{\epsilon}{\rho V^2} = \frac{1}{Ca} = \frac{1}{Ma^2}, \quad (18)$$

dove $Ca = V^2/(\epsilon/\rho)$ è il numero di Cauchy e $Ma = V/\sqrt{\epsilon/\rho}$ è il numero di Mach. Il numero di Mach rappresenta il rapporto tra la velocità media del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso (come è noto, $Ma = 1$ rappresenta il confine tra flussi subsonici e flussi supersonici). L'Eq.(17) si può riscrivere, dunque, in forma adimensionale, usando la relazione tra

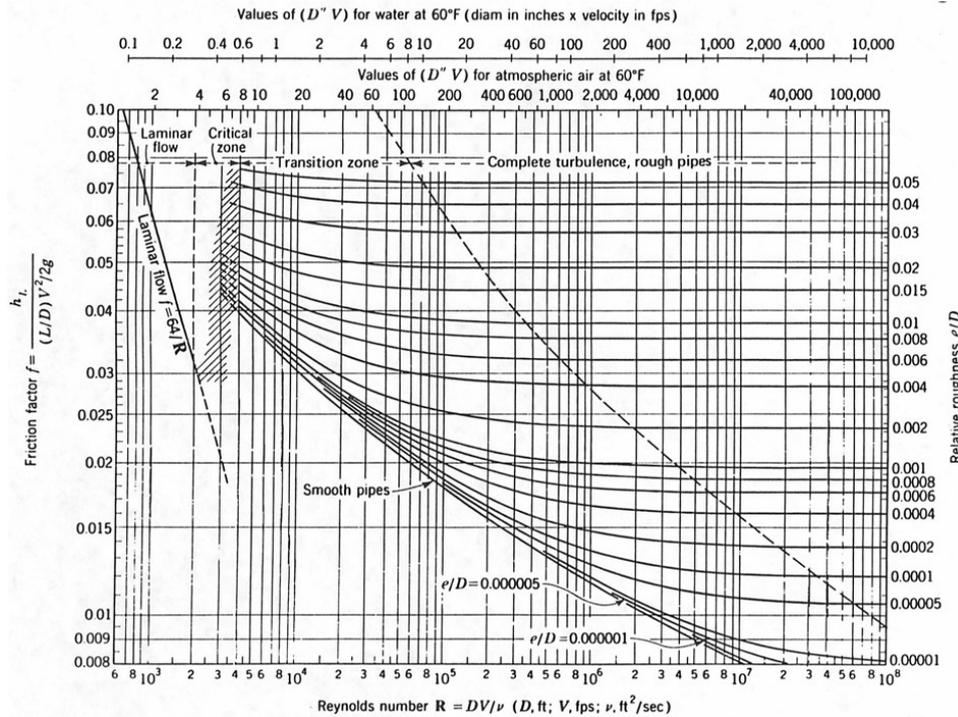


Figura 7: abaco di Moody [11]. L'indice di resistenza, il numero di Reynolds e la scabrezza sono qui indicati come f , R e e , rispettivamente.

$\Delta p/L$ e cadente, come

$$\lambda = 2f'' \left(\text{Re}, \frac{\mathcal{R}}{D}, \text{Ma} \right). \quad (19)$$

L'indice di resistenza risulta, dunque, anche funzione del numero di Mach. Sperimentalmente, si vede che esiste una condizione di autosimilitudine rispetto a Mach quando $\text{Ma} < 0.3$. In tale situazione, il flusso può essere considerato incomprimibile (anche se il fluido non lo è), e, per valutarne l'indice di resistenza, si può utilizzare, se si tratta di tubi commerciali, l'abaco di Moody.

Abbiamo visto come determinare l'indice di resistenza da inserire nella formula di Darcy-Weisbach per determinare la cadente energetica media, che coincide con la pendenza locale della LCT. La diminuzione di energia meccanica media ΔH che la corrente subisce dopo aver percorso un tratto di condotta a sezione costante e asse rettilineo di lunghezza L è, dunque, pari a $\Delta H = JL$. Questa diminuzione di energia meccanica, che si trasforma in calore, viene chiamata **perdita distribuita**. Le perdite distribuite sono vincolate all'esistenza della cadente J , cioè al fatto che sia definita la derivata del carico totale medio rispetto alla coordinata curvilinea s . Esistono casi

in cui tale condizione non è verificata; questi casi sono associati con brusche variazioni nella geometria della condotta (brusca variazione nel diametro, presenza di curve a gomito) e/o con la presenza di elementi di disturbo del flusso (ad esempio, valvole per il controllo della portata). Ogni qualvolta esiste una discontinuità nel carico totale medio, con quest'ultimo che diminuisce bruscamente, si parla di **perdite localizzate** (o **concentrate**). Si noti, per completezza, che variazioni discontinue nel carico totale sono associate anche con la presenza di macchine operatrici in grado di scambiare energia meccanica con il fluido (pompe e turbine).

2 Perdite localizzate

Nel caso di perdite localizzate, la variazione di carico totale medio ΔH_{loc} è dovuta ad una perdita di pressione Δp_{loc} aggiuntiva rispetto alla variazione di pressione che si avrebbe anche nel caso di fluido ideale per via della brusca variazione di geometria. Δp_{loc} risulta funzione della densità, della viscosità, di un qualche diametro e velocità media (prima o dopo la variazione di geometria), della scabrezza e della forma, intesa come uno o più coefficienti adimensionali rappresentativi della geometria:

$$\Delta p_{loc} = f(\rho, \mu, D, V, \mathcal{R}, \text{forma}). \quad (20)$$

Adimensionalizzando mediante la terna inerziale, otteniamo

$$\frac{\Delta p_{loc}}{\rho V^2} = f' \left(\text{Re}, \frac{\mathcal{R}}{D}, \text{forma} \right). \quad (21)$$

La dipendenza dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa è quasi sempre trascurabile, per cui l'Eq.(21) si può riscrivere, con $\Delta H_{loc} = \Delta p_{loc}/\gamma$, come

$$\Delta H_{loc} = K \frac{V^2}{2g}, \quad (22)$$

dove K è un coefficiente di perdita che dipende solo dalla forma (geometria). L'Eq.(22) mostra che le perdite di carico localizzate sono proporzionali all'altezza cinetica. Si rimanda al Par. 2.1.2 degli **Esercizi di Dinamica dei Fluidi** per un elenco dei casi più comuni di perdite localizzate.

Riferimenti bibliografici

- [1] Stokes, G.G., *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, Trans. Cambridge Philos. Soc., 9, 8-106 (1851).
- [2] Reynolds, O., *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Philos. Trans. Royal Soc., 174, 935-982 (1883).
- [3] Darcy, H., *Recherches Experimentales Relatives au Mouvement de L'Eau dans les Tuyaux*, Mallet-Bachelier, Paris (1857).
- [4] Weisbach, J., *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*, Braunschweig (1845).
- [5] von Kármán, T., *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu G'ottingen, Fachgruppe 1, Mathematik, 5, 58-76 (1930).
- [6] Prandtl, L., *Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung*, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 77, 105-114 (1933).
- [7] Cerbus, R.T., Liu, C., Gioia, G., and Chakraborty, P., *Laws of Resistance in Transitional Pipe Flows*, Phys. Rev. Lett., 120, 54502 (2018).
- [8] Blasius, H., *Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 131, 1-41 (1933).
- [9] Nikuradse, J., *Strömungsgesetze in Rauhen Rohren*, ForschHft. Ver. Dt. Ing., 361 (1933).
- [10] Colebrook, C.F., *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*, Journal of the ICE, 11, 133-156 (1939).
- [11] Moody, L.F., *Friction factors for pipe flow*, Trans. ASME, 66, 671-684 (1944).